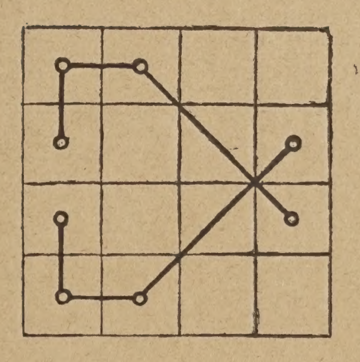
RECHERCHES ANALYTIQUES
SUR LES CARRÉS MAGIQUES

PAR LE D.r PROMPT

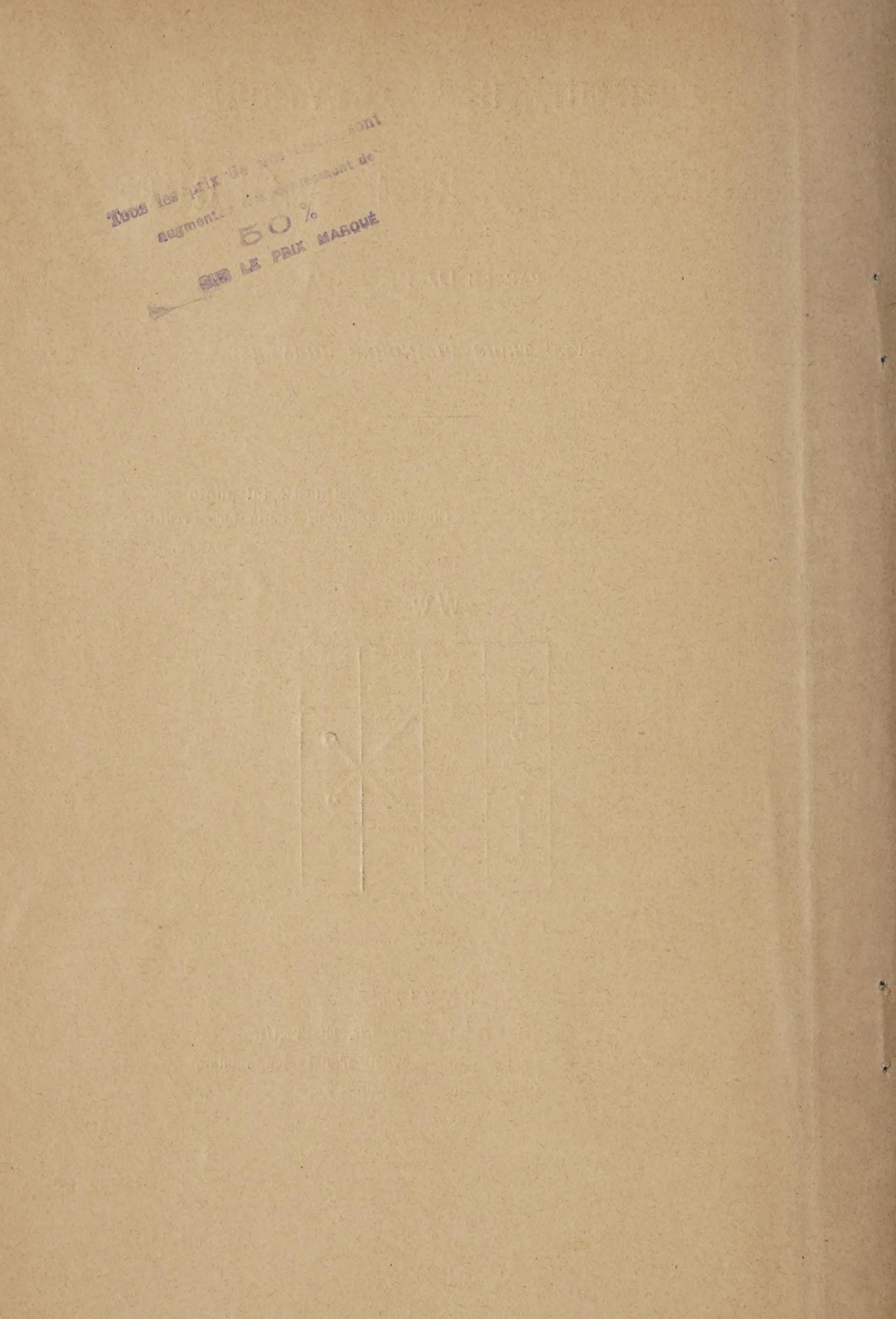
AVEC TROIS PLANCHES GRAVÉES

Quest'è tal punto
Che più savio di te già fece errante.
DANTE.

Ww=



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.
1917



RECHERCHES ANALYTIQUES

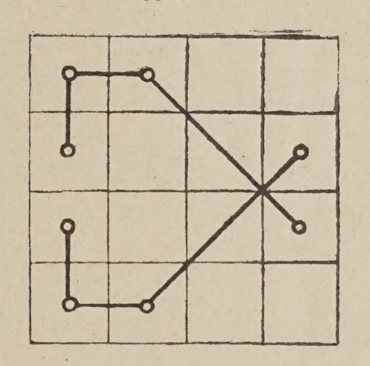
SUR LES CARRÉS MAGIQUES

PAR LE D.r PROMPT

AVEC TROIS PLANCHES GRAVÊES

Quest'è tal punto
Che più savio di te già fece errante.
DANTE.

Ww=



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.
1917

RECERCHES ANALYTIQUES SUR LES CARRÉS MAGIQUES

Dans la théorie des carrés magiques de 4, on est conduit à étudier les assemblages de quatre nombres plus petits que 17 et dont la somme forme le nombre magique 34. On voit qu'il y en a 86, et il est facile d'en faire une table. Nous les appellerons *assemblages magiques*.

Soit un de ces assemblages, celui-ci par exemple :

1 4 14 15

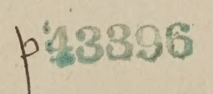
Si l'on multiplie tous ses termes par 2, et si l'on réduit au module 17, on a un nouvel assemblage magique ; en le traitant de même que le premier, on en a un troisième ; à la huitième opération, l'assemblage primitif se reproduit.

Avec d'autres assemblages, la série se composera de quatre formations, ou bien de deux seulement. C'est ce qui aura lieu quand on choisira un assemblage dont les termes seront complémentaires deux à deux par rapport au nombre 17 :

1 6 11 16.

Nous donnerons à ces assemblages le nom d'*assemblages magiques complémentaires*, ou par abréviation, assemblages *m c*. Si l'on veut savoir combien il y en a, il suffit d'observer que le nombre 17 peut être divisé en deux de huit manières différentes. Ainsi le nombre cherché est égal à celui des combinaisons de huit objets deux à deux, c'est à dire à $\frac{8 \times 7}{1 \times 2} = 28$.

Nous avons ainsi défini des assemblages qui se disposent en séries par huit, par quatre ou par deux et que nous représenterons par les



chiffres romains VIII, IV et II. Il y a 24 assemblages VIII ; le nombre total est donc 52, et nous dirons que nous avons là des *assemblages magiques parfaits.*

Il en reste 34, qui se comportent différemment, si on les soumet au même procédé d'analyse. Ils donnent tantôt des assemblages magiques et tantôt des assemblages qui ne le sont pas, et que nous appellerons *paramagiques*. Tel est l'assemblages 1, 7, 11, 15 qui, avant de de se reproduire, fournira successivement deux assemblages magiques, un assemblage paramagique, trois assemblages magiques, et un assemblage paramagique. Nous dirons que c'est un assemblage VI parce que la sèrie entière se compose de six assemblages magiques, avec deux qui ne le sont pas. Il y a aussi des assemblages IV et II. Nous leur donnerons le nom d'*assemblages imparfaits*.

Duns les groupes d'assemblages parfaits, chaque assemblage donne toujours la même série que les autres, en sorte qu'il n'y a pas lieu de les distinguer entr'eux. Chez les assemblages imparfaits, il n'en est pas de même. Par exemple, un assemblage VI donnera d'abord deux assemblages magiques, et ensuite un assemblage paramagique ; nous dirons que c'est un assemblage (VI, 1). Celui qui le suit dans la série donnera d'abord un assemblage magique, et ensuite un assemblage paramagique ; nous l'appellerons (VI, 2) ; le troisième sera appelé (VI, 3).

On sait que Frénicle a calculé la table complète des carrés de 4, et qu'il y en a 880 (1). On sait aussi qu'il les a divisés en cinq classes. Il a désigné les quatre premières par les lettres grecques α, β, γ, δ, et il leur a attribué des caractères simples et précis ; quant à la cinquième, il ne lui a pas donné de nom, et il ne lui reconnaît d'autre caractère que de n'en avoir aucun.

Il y a eu là de sa part une faute d'inattention. Dans cette classe, que nous appellerons ε, il existe des propriétés entièrement analogues

(1) Cette table est insérée dans le volume des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, pour 1676, qui renferme également les divers mémoires de Frénicle sur ces carrés. Ceux que l'on connaissait avant lui avaient été découverts par les Hindoux ; il y en avait vingt seulement. Frénicle n'a pas donné d'explications sur la méthode qu'il a suivie pour construire sa table, et personne n'a jamais réussi à deviner quelle était cette méthode.

à celles de la classe δ; ces deux séries de carrés sont en quelque sorte le pendant l'une de l'autre.

Si l'on représente les termes d'un carré magique par les lettres de la figure 1, la classe δ se distingue par la présence de deux assemblages magiques, disposés sur les carrés B C F G, L M R S, qui deviennent d'ailleurs ceux qu'on trouve en E F K L, G H M N, si l'on fait tourner le carré msgique de 90 degrés autour de son centre. Or, dans tous les carrés ε, on observe la même propriété pour les rectangles B C L M, F G R S; on peut la reconnaître sur notre figure 2, où nous donnons, à titre d'exemple, un carré ε.

Fig. 1.

A	B	C	D
E	F	G	H
K	L	M	N
P	R	S	V

Ce n'est pas tout. Si l'on examine les carrés de la classe δ de Frénicle, on voit qu'il y en a 208 qui présentent à la fois les caractères de la classe δ et ceux de la classe ε. Tel est celui que l'on voit dans notre figure 3 : en y trouve, dans le sens horizontal, les deux carrés de Frénicle (5 + 16 + 12 + 1, 9 + 4 + 8 + 13), et les deux rectangles de la classe ε (5 + 9 + 8 + 12, 16 + 1 + 4 + 13), recouverts les uns et les autres par des assemblages magiques. Il y a donc lieu de comprendre ces 208 carrés dans une classe nouvelle que nous nommerons δε.

Fig. 2 (1).

539 ε VI $\overset{\wedge}{160}$

3	13	12	6
1	15	10	8
14	2	7	11
16	4	5	9

Fig. 3.

556 δε II

3	15	6	10
5	16	9	4 A
12	1	8	13
14	2	11	7

En raison de ces observations, la classe δ se réduit à 120 carrés; c'est le nombre que Frénicle avait trouvé pour la classe ε.

La considération des assemblages *m c* nous conduit à créer d'autres divisions dans la table des carrés magiques de quatre.

Dans tous les carrés α et dans la moitié des carrés γ, ces assemblages occupent les diagonales. Nous diviserons en conséquence la

(1) Nous donnons à chacun de nos carrés un numéro d'ordre. Ce numéro permet de le retrouver ausitôt dans la table de Frénicle, qui occupe dans le volume de l'Académie des Sciences 45 pages, contenant 20 carrés chacune, excepté la première, où il y en a 16 seulement, et la dernière, où il n'y en a que quatre. Ainsi pour chercher un carré dont on a le numéro, il faut retrancher 16, et diviser par 20; le quotient indique la position de la page; le reste indique le rang du carré dans cette page.

Quant aux autres indications qu'on rencontre dans les titres des carrés, elles seront expliquées ultérieurement.

classe γ de Frénicle, et nous en ferons deux classes nouvelles que nous appellerons γ et γ′ : le nom de γ′ est réservé aux carrés tels que celui de notre figure 4 dont les diagonales remplissent la condition indiquée : il y en a 96.

Dans presque tous les autres carrés, c'est à dire dans les classes β, γ, δε, δ, ε, sauf une petite exception qui sera mentionnée plus loin, on trouve quatre lignes orthogonales parallèles qui sont couvertes par des assemblages *mc*. On peut vérifier le fait sur nos figures 2 et 3, où les lignes en question sont dirigées dans le sens vertical. Les carrés qui jouissent de cette propriété sont au nombre de 720. On demeure confondu, quand on voit qu'une donnée aussi simple, aussi générale, n'a jamais été aperçue jusqu'ici. Comment a-t-elle échappé à Fermat, qui disait que l'étude des carrés magiques est ce qu'il y a de plus beau dans l'arithmétique supérieure ? A Euler? A Lucas ? A Frolow, qui a repris en détail la table de Frénicle pour la vérifier, et pour s'assurer qu'il ne pouvait pas y avoir plus de 880 carrés de 4 ? Que dire de Violle, de La Hire, de Riollot, de Barbette, et de tant d'autres encore, qui se sont trouvés, à cet égard, dans le même état de cécité, si l'on peut s'exprimer ainsi ?

Fig. 4.

368 γ′ IV $\overset{\wedge}{28}$

2	11	13	8	
7	14	12	1	G
16	5	3	10	H
9	4	6	15	

Il semble qu'on doit chercher la cause de la difficulté dont il s'agit dans l'emploi exclusif de la méthode synthétique ; toutes les fois qu'on a étudié les carrés magiques, on s'est ingénié à créer de nouvelles figures : cela fait, on les a considérées dans leur ensemble, sans distinguer leurs éléments, comme nous avons commencé à le faire ici. On a procédé comme aurait fait un naturaliste, qui, voulant examiner une espèce animale, se serait interdit l'usage du microscope et du scalpel, et se serait obstiné à envisager les sujets dans leur ensemble, sans jamais en venir à aucun travail sur la structure des tissus ou sur la disposition des organes.

Il n'est pas douteux que la synthèse peut donner d'excellents résultats ; mais ces résultats seront très incomplets, si l'on n'a pas recours à l'analyse.

Si nous revenons à nos lignes orthogonales *mc*. nous voyons qu'il nous reste à étudier l'exception qui a été signalée plus haut. Il s'agit d'une petite catégorie de 16 carrés, dont 8 appartenant à la classe δ, et 8 à la classe ε. Au lieu d'avoir quatre lignes orthogonales parallèles

couvertes par les assemblages *mc*, ils en ont deux seulement; cela se voit sur l'exemple qui forme notre figure 5. Nous désignons cette catégorie par la lettre E, initiale du mot exception. Dans notre exemple, les assemblages *mc* occupent les deux lignes verticales situées à gauche.

Ce que nous avons dit suffit pour prouver qu'il est indispensable d'introduire un perfectionnement dans la table de Frénicle. Cette tablc, très bien disposée quant à l'ordre des figures, présente constamment les carrés avec un terme en haut et à gauche qui est le plus petit de ceux qui occupent les quatre angles. C'est une règle qui laisse quelque chose dans l'indétermination. Ce qu'elle détermine, c'est la situation d'une diagonale: le carré peut encore tourner autour de cette diagonale; pour que les objets soient en ordre, il faut que son orientation à cet égard soit sous la dépendance d'un principe fixe, et il ne peut y en avoir aucun qui soit plus net que celui d'une direction uniforme des lignes orthogonales *m c*. Nous avons reconstruit la table de Frénicle en choisissant ponr ces lignes la direction verticale. On trouvera plus loin un extrait de notre travail. Il n'y a encore dans ce que nous avons dit aucun moyen de fixer l'orientation des carrés α et γ'; mais nous indiquerons plus loin un procédé pour y parvenir dans un grand nombre de cas.

Fig. 5.

144 ε $\underline{\text{IV}}$ E

1	13	12	8
2	14	7	11
16	4	9	5
15	3	6	10

Ces préliminaires étant compris, nous allons établir, pour les carrés magiques de quatre, des groupes analogues à ceux que nous avons déjà créés pour les 86 assemblages magiques.

A cet effet, il est d'abord nécessaire de savoir (1) que les assemblages magiques parfaits couvrent toujours les huit lignes orthogonales, et les figures que Frénicle a considérées pour établir sa classification. Il en est de même pour les rectangles qui nous ont servi à caractériser les classes ε et $\delta\varepsilon$. Il en est de même pour les diagonales, dans les classes α, β, γ, γ', et dans 96 carrés de la classe $\delta\varepsilon$. Partout ailleurs, les diagonales sont occupées par des assemblages magiques imparfaits.

Nous voyons par là ce qui va arriver si nous doublons tous les termes d'un carré et si nous réduisons au module 17. Dans les classes

(1) Voir notre question sur ce sujet dans l'*Intermédiaire des mathématiciens* (Juillet 1916).

où les diagonales sont couvertes par des assemblages magiques parfaits, nous aurons un carré magique : en poursuivant de même, nous en aurons un autre, et cela continuera ainsi, jusqu'à reproduction du carré primitif. De plus, tous les termes de cette série appartiendront à la même classe, d'où il suit que la classe se trouvera divisée, suivant les circonstances, en un certain nombre de groupes VIII, IV et II. Dans le cas contraire, nous aurons des figures où les lignes orthogonales seront toujours couvertes par des assemblages magiques, tandis que les diagonales le seront ou ne le seront pas : il se formera donc une série composée d'un nombre plus ou moins grand de carrés magiques ou paramagiques, et tous les carrés magiques de cette série appartiendront à la même classe. Ces classes se trouveront ainsi divisées en groupes de carrés $\underline{\text{VI}}$, $\underline{\text{IV}}$, $\underline{\text{II}}$ et $\underline{\text{I}}$. On voit par là combien la classification de Frénicle est heureuse et bien entendue : elle subsiste en entier en présence d'une classification nouvelle, beaucoup plus détaillée, qui vient lui donner une confirmation d'autant plus concluante qu'elle se base sur des principes tout à fait différents, et empruntés à la théorie des racines primitives des nombre premiers et des racines eulériennes des nombres composés, c'est à dire à une théorie que personne jusqu'ici n'avait crue susceptible de se relier à celle des carrés magiques.

La nouvelle classification se détaille ainsi :

Carrés	α (tous carrés VIII)	48
»	β VIII	96
»	β IV	96
»	γ VIII	96
»	γ′ VIII	48
»	γ′ IV	40
»	γ′ II	8
»	δε IV	96
»	δε $\underline{\text{II}}$	64
»	δε $\underline{\text{I}}$	48
»	δ $\underline{\text{VI}}$	48
»	δ′ $\underline{\text{VI}}$	48
»	δ $\underline{\text{IV}}$	24
»	ε $\underline{\text{VI}}$	48
»	ε′ $\underline{\text{VI}}$	48
»	ε $\underline{\text{IV}}$	24
	Total	880

La division des classes δ VI et ε VI en deux groupes égaux résulte de circonstances qui seront expliquées plus loin.

Enfin, c'est dans les classes δ IV et ε IV que nous avons à détacher la catégoric E, dont la nature a dèjà été définie.

Nous sommes à présent en mesure de juger les idées que Lucas a introduites dans la science quand il a imaginé ses carrés diaboliques, et nous allons voir qu'elles doivent être abandonées sans aucune réserve, et qu'il faut les remplacer par des conclusions beaucoup plus importantes, et dont la nature ne sera ni suspecte, ni entachée d'erreur.

Lucas, dans ses études sur les carrés de quatre, s'est basé sur la considération des figures de symétrie qui s'y trouvent. Il faut avant tout bien définir ici les termes de *symétrie* et de *figure;* sans cela nous pourrions tomber dans une confusion irrémédiable.

Dans tout carré de quatre formé avec les 16 premiers nombres, on peut déterminer 86 combinaisons différentes de 4 termes dont la somme forme le nombre magique. Considérons les centres des cases où se trouvent ces quatre termes. C'est un ensemble de quatre points qu'on peut joindre de beaucoup de manières par trois droites, ou par quatre droites, ou par un plus grand nombre. Mais, parmi ces maniéres, il pourra arriver qu'il y en ait une que l'esprit conçoit d'abord, et qui est si naturelle qu'elle semble unique. C'est, par exemple, ce qui se passe, quand les quatre points forment les quatre angles d'un carré ou d'un parallélogramme. Il en est autrement, si les points affectent une disposition irrégulière; supposons, pour fixer les idées, qu'ils soient réunis les uns aux autres par trois droites. Appelons les A, B, C, D: on pourra effectuer la réunion par une seule ligne brisée continue, d'autant de maniéres qu'il y a d'arrangements, c'est à dire de 24 manières; mais elles seront égales quand il n'y aura pas d'autre changement que le renversement d'un arrangement entier. Ainsi la figure ABCD est la même que la figure DCBA. Le nombre des figures se trouve ainsi ramené à douze. D'ailleurs, au lieu d'aller par une seule marche continue depuis le premier point jusqu'au dernier, on peut joindre trois d'entr'eux par deux droites, et joindre après par la troisième droite le point qui se trouve entre les deux premiers avec le quatrième. On aurra ainsi douze arrangements en plus, ce qui fait 24 figures, parmi lesquelles on sera souvent dans le doute, si l'on veut choisir celle qui mérite d'étre considérée comme la plus élégante et la plus naturelle.

Il y a donc, dans les combinaisons que nous étudions, deux classes à établir, dont la démarcation n'est pas parfaitement précise, mais qui sont telles cependant que pour la plupart d'entr'elles, on n'hésite pas à déclarer qu'on a, d'une part, une combinaison simple, qu'il n'est pas raisonnable de concevoir autrement que sous la forme d'une figure unique, telle que le carré ou le rectangle, et, d'autre part, une combinaison compliquée, c'est à dire, qui se prête aisément à l'établissement de plusieurs figures également acceptables.

Les combinaisons des deux ordres, ainsi définies, peuvent former de différentes manières des ensembles symétriques; nous allons voir comment.

Une seule combinaison peut être symétrique par rapport aux deux axes du carré. C'est ce qui a lieu pour les termes A D P V (fig. 1). Nous dirons que c'est la symétrie simple.

Une combinaison symétrique par rapport à un axe seulement pourra former, en s'unissant à une autre du même genre, un ensemble symétrique par rapport aux deux axes. Tels sont les systêmes B C F G, L M R S. Ce sera, dans notre nomenclature, la symétrie binaire.

Une combinaison qui n'est symétrique ni par rapport à l'un des axes, ni par rapport à l'autre, devra, pour former un système symétrique, s'associer à trois figures semblables. C'est la symétrie quaternaire; comme exemple, nous citerons le systême A B E F, C D G H, K L P R, M N S V.

Un systême symétrique peut être placé semblablement par rapport aux deux axes, ou bien ne pas jouir de cette propriété; ainsi la combinaison B C R S est symétrique par rapport aux deux axes; mais elle n'est pas semblablement placée par rapport à l'un et à l'autre; ce sera pour nous une symétrie imparfaite. Le systême A B E F constitue un contraire, avec les trois systêmes analogues, un arrangement de termes qui est semblablement placé par rapport aux deux axes; c'est la symétrie parfaite.

On conçoit déjà qu'avec les symétries simples, binairess, parfaites, on n'aura jamais que des combinaisons simples. Ave les symétries quaternaires, imparfaites, on pourra avoir des combinaisons compliquées: mais on pourra aussi avoir des combinaisons simples.

Frénicle, quand il a établi ses classes, n'a considéré que des combinaisons dans lesquelles les quatre points désignés formaient un carré. Lucas, dans ses recherches sur les combinaisons symétriques,

n'a aperçu que des carrés, des rectangles, des parallélogrammes, des trapèzes, des triangles. Il a découvert ainsi dans les carrés α 52 combinaisons symétriques, recouvertes par des assemblages parfaits; il n'est pas allè plus loin; il a cru que ce nombre 52 était un maximum, et qu'il n'existait que dans les carrés α: il a cru que ces carrés jouissaient d'une beauté supérieure, et il leur a donné le nom bizarre de carrés diaboliques. Il est à peu près inutile de rappeler que Lucas n'a pas eu la moindre notion de notre classification des assemblages.

Mais si l'on examine les carrés des trois premières classes de Frénicle, et avec eux les carrés δε IV, c'est à dire, tous ceux qui ont sur leurs diagonales des assemblages parfaits, on y trouvera toujours 52 combinaison simples, variables d'une classe à l'autre, mais formant dans chaque classe un systême constant et uniforme; dans ces systêmes, tout est symétrique par rapport aux deux axes; tout est recouvert par des assemblages parfaits. Ces systêmes sont au nombre de sept; on les trouve, respectivement, dans les carrés α, β VIII, β IV, γ VIII, γ′ VIII, γ′ IV et γ′ II, δε IV: le nombre des carrés où ils existent est égal à 528. Dans les carrés α et γ′, tous ces systêmes symétriques sont semblablement placés par rapport aux deux axes; dans les autres classes, il y en a qui sont semblablement placés, et il y en a qui ne le sont pas.

Mais ces combinaisons ne sont pas les seules; dans beaucoup de nos 528 carrés il y en a d'autres, qui sont recouvertes par des assemblages VI.

Pour montrer comment se disposent ces formations, nous prendrons nn exemple: ce sera le carrré 41 γ VIII.

Nous voyons que les termes 12, 11, 2, 9 forment un assemblage magique (VI, 3). Prenons ceux qui en sont symétriques par rapport à l'axe vertical: 6, 5, 16, 7; c'est encore un assemblage magique (VI, 3). Il en est de même des termes 9, 10, 3, 12, et 7, 8, 13, 6 qui sont symétriques des premiers par rapport à l'axe horizontal. Par conséquent nous avons là un systême symétrique, assez compliqué d'ailleurs, et qui pourrait donner lieu à plusieurs dessins différents. Ce systêmc est couvert par des assemblages VI, qui sont tous du même numéro. C'est une loi constante: il en est toujours ainsi. En outre, si l'on prend l'assemblage 1, 12, 10, 11, qui est encore un (VI, 3), on voit qu'il couvre

Fig. 6.

41 γ VIII.

1	12	6	15	
13	8	10	3	R
16	5	11	2	S
4	9	7	14	

quatre termes tels, que ceux qui en sont symétriques par rapport aux deux axes représentent encore des assemblages (VI, 3).

On voit par là que ce carré, indépendamment des 52 combinaisons de symétrie couvertes par des assemblages magiques parfaits, en possède 8 qui sont occupées par des assemblages VI *lesquels sont tous de même numéro.* Ceci, répétons le, est une loi, qui ne souffre aucune exception : il n'arrive jamais que des assemblages VI de numéros différents soient associés ainsi.

Prenons maintenant les 8 carrés qui forment le groupe auquel appartient notre carré 41. Ce sont les suivants :

41, 396, 729, 114, 237, 701, 150, 304.

Dans le carré 396, les assemblages (VI, 3) deviendront des assemblages paramagiques. En conséquence, ce carré aura 52 combinaisons de symétrie, et il n'en aura que 52. Mais, dans le carré 729, nous verrons reparaître nos assemblages VI sous la forme d'assemblages (VI, 1) ; ce seront des assemblages (VI, 2), et (VI, 3) dans les carrés suivants ; ils deviendront paramagiques dans le 701, qui n'aura que 52 combinaisons de symétrie ; le 150 et le 304 en auront 60, et on voit que le groupe entier aura fourni deux carrés à 52 combinaisons, et 6 à 60 combinaisons.

D'ailleurs, il y a 12 groupes de carrés VIII dans la classe entière. Sur ces 12 groupes, il y en a 8 qui se comportent comme le groupe que nous venons d'examiner ; il y en a quatre qui n'ont que des carrés à 52 combinaisons symétriques. En résumé, il y a 48 carrés où l'on trouve le maximum 60, et 48 où l'on trouve le minimum 52. Cette proportion s'observe dans toutes les classes, sauf dans les petites classes γ' IV et γ' II.

En effet : on voit que les carrés à 60 combinaisons marchent toujours trois par trois ; or il y a 40 carrés dans la classe γ' IV ; la moitié de ce nombre est 20, c'est à dire qu'elle n'est pas divisible par 3 ; il en rèsulte que le maximum s'observe dans 18 carrés seulement ; par contre, il existe dans les huit carrés γ' II. Il suit de là que le nombre total des carrés à 60 combinaisons est 266, et que celui des carrés où l'on ne trouve que le minimum est 262.

Avant d'aller plus loin, nous devons indiquer les caractères nets et précis qui séparent les deux sortes de combinaisons de symétrie que nous avons étudiées. La simplicité de l'un, la complication de l'autre

sont des caractères importants, mais dans lesquels il y a une certaine indécision. Mais ce que nous pouvons dire d'une manière absolue, c'est que les combinaisons qui apparaissent pour former le maximum ne constituent jamais des systèmes de symétrie parfaite.

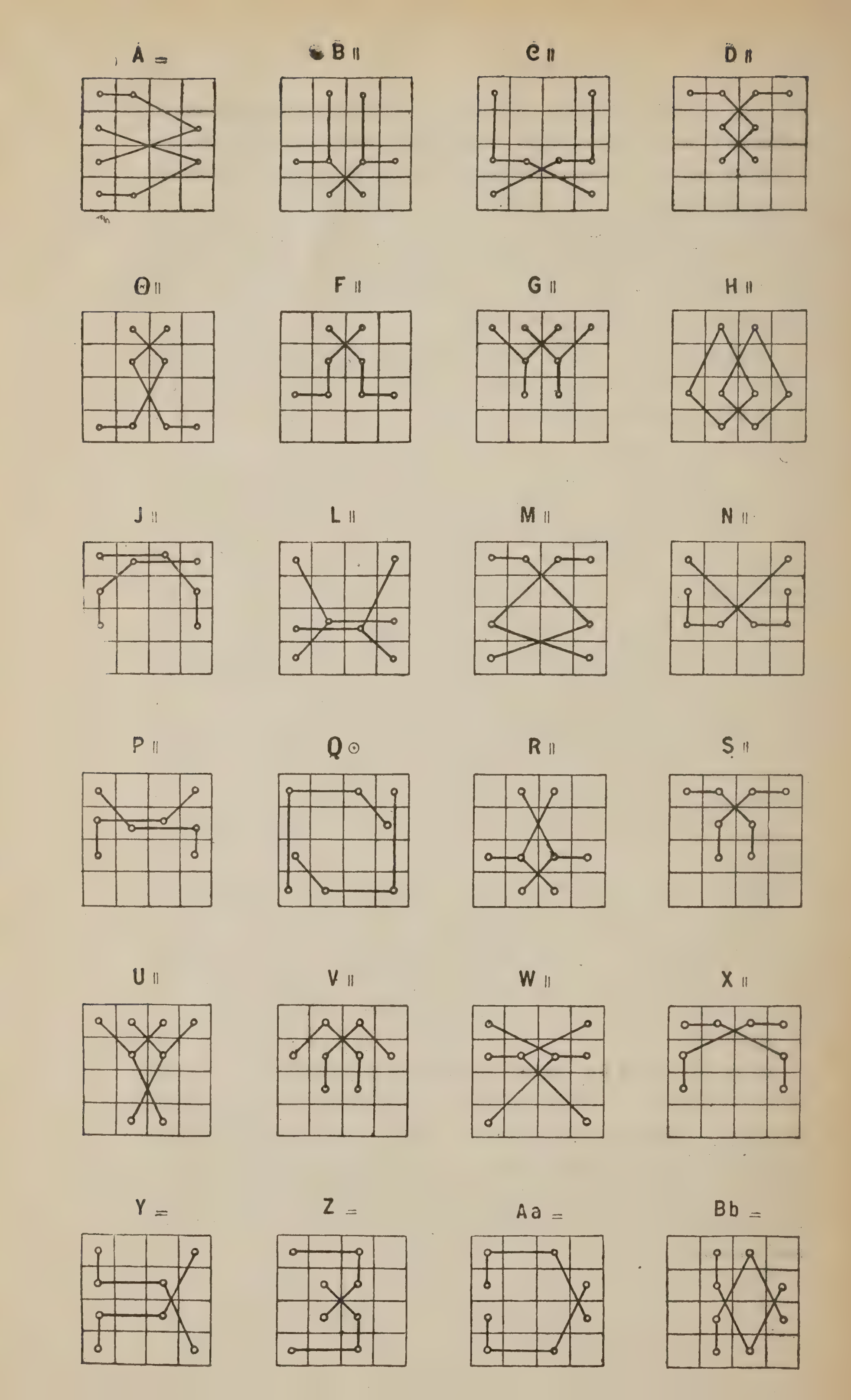
En outre, elles varient beaucoup dans une même classe, et d'une classe à l'autre : aussi nous dirons que ce sont des *combinaisons de symétrie variable ;* quant aux autres, nous leur donnerons le nom de *combinaisons de symétrie constante.*

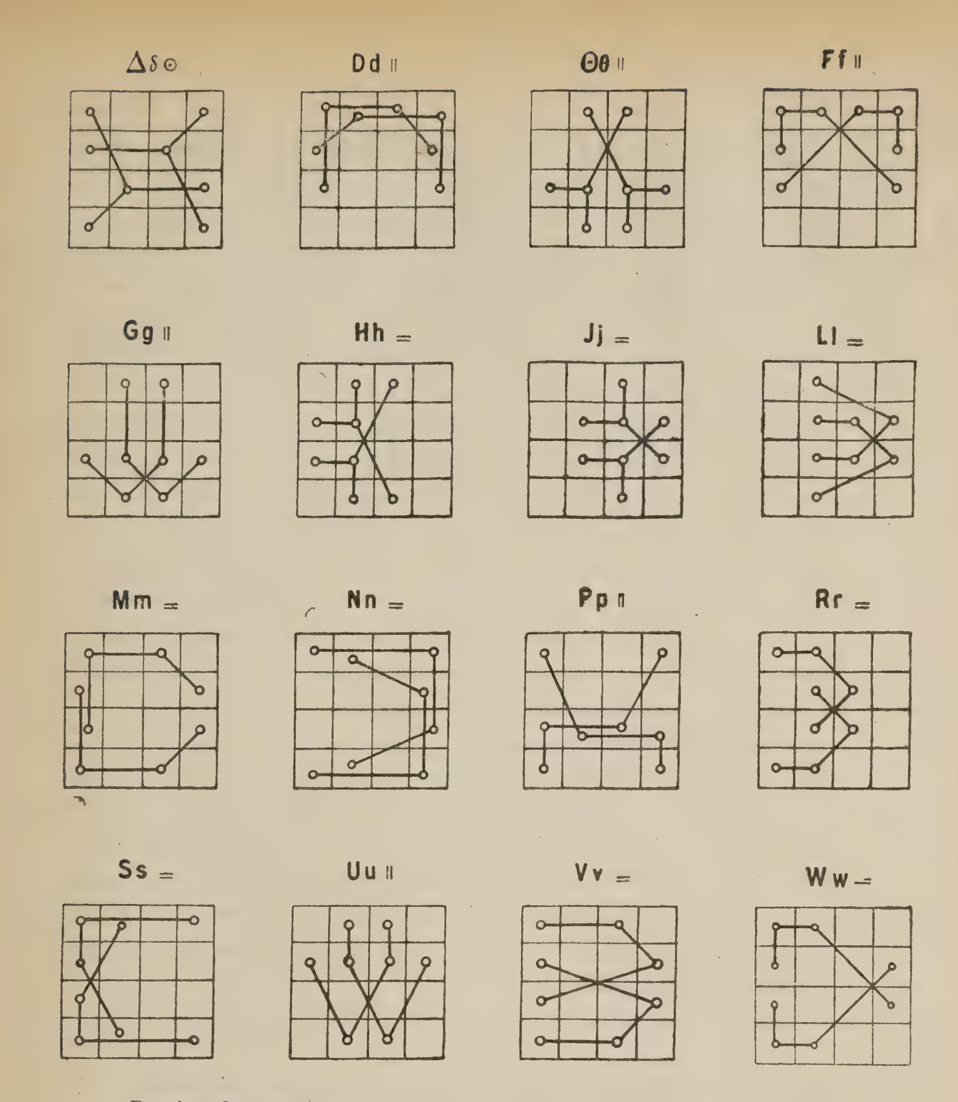
Dans les classes δ VI et ε VI, δ IV e• ε IV, les combinaisons de symétrie variable n'existent pas. Dans chacune de ces classes, il y a 44 figures de symétrie constante ; pour la petite catégorie E, leur nombre se réduit à 26.

Voici mainteront ce qui nous a obligé à distinguer les classes δ VI et δ′ VI, ε VI et ε′ VI- Si l'on examine, dans la classe δ VI, quelles sont les combinaisons de symétrie, on voit qu'il y en a 40 qui sont recouvertes par des assemblages magiques parfaits. Mais cette série présente, entre les deux classes que nous avons établies, quelques différences. C'est ainsi que, dans l'une, les carrés déterminateurs de la classe sont couverts par des assemblages *mc*, et que, dans l'autre, ils ne le sont pas. Enfin les deux diagonales forment deux combinaisons de symétrie constante, couvertes par des assemblages VI, et les assemblages complémentaires de ceux qui couvrent les diagonales occupent deux parallélogrammes dont l'ensemble est symétrique par rapport aux deux axes, et qui se trouvent différemment placés dans nos denx classes. Les différences qui séparent les classes ε VI et ε′ VI sont analogues.

Dans la classe δε II, il y a 32 combinaisons de symétrie constante, couvertes par des assemblages magiques parfaits, et deux couvertes par des assemblages IV qui sont les diagonales. En outre, il y en a toujours quatre qui appartiennent à la symétrie variable, et qui sont couvertes par des assemblages VI. Cela fait en tout 38 combinaisons de symétrie.

Dans les carrés δε I, nous avons deux diagonales qui sont les mêmes pour toute la classe, et qui sont couvertes par des assemblages II, complémentaires l'un de l'autre. Il y a, comme dans les carrés précédents, 32 combinaisons de symètrie constante, occupées par des assemblages parfaits ; enfin il y en a quatre de symétrie variable, couvertes par des assemblages VI, qui existent dans 16 carrés seulement.


A
B
C
D
Θ
F
G
H
J
L
M
N
P
Q
R
S
U
V
W
X
Y
Z
Aa
Bb



Dessins des systêmes de quatre combinaisons de symétrie variable qui existent dans les Carrés de quatre.

Pour compléter ce que nous venons de dire, il faudrait insérer ici tous les dessins qui représentent les combinaisons de symétrie, et reproduire la table de Frénicle avec les perfectionnements que nous y avons introduits. Mais notre mémoire n'est qu'un résumé très court. La situation actuelle de l'imprimerie en Italie et en France ne nous permet que de donner un petit nombre de pages et de figures, et nous devons nous borner à montrer, non pas tout ce qui a été inconnu jusqu'à présent, mais seulement ce qui a été toujours inconnu parce que c'était fort difficile à voir. Les combinaisons de symêtrie constante sont simples: si le lecteur est prévenu qu'elles existent, il les trouvera sans peine. Il n'en est pas de même pour les combinaisons de symétrie variable; aussi nous les avons toutes dessinées dans la planche ci-jointe. Pour la symétrie constante, nous ne donnons aucun dessin. Les combinaisons de symétrie variable sont au nombre de quarante.

Il aurait été impossible, dans la plupart des cas, de placer sur un même dessin les quatre combinaisons qui forment l'ensemble symétrique; cela aurait occasioné une confusion inextricable. Nous en avons figuré seulement deux. Quand elles sont symétriques par rapport à l'axe vertical, la lettre qui forme le titre est accompagnée de deux traits verticaux; il y a deux traits horizontaux, si la symétrie a lieu par rapport à l'axe horizontal, un petit cercle si elle existe par rapport au centre. Le dessin est obtenu pour chaque combinaison, à l'aide de trois droites; dans un seul cas nous en avons mis quatre; c'est pour la combinaison H, où le dessin se compose de deux quadrilatères d'une forme régulière et élégante.

Presque tous ces dessins pourraient étre variés de beaucoup de manières: nous avons choisi celle qui nous a paru la plus avantageuse. Mais très souvent l'hésitation était permise, et il est possible que nous soyons plus tard dans le cas de préparer d'autres dispositions.

Pour retrouver ces combinaisons sur les carrés magiques, il est nécessaire que l'orientation de ces carrés soit conforme aux principes qui ont été indiqués plus haut. On a vu cependant que ces principes laissent une indétermination pour les 144 carrés qui forment les classes α et γ'. L'examen des combinaisons de symétrie variable permet souvent de remédier à cette indétermination.

Soient par exemple les combinaisons A et B. Elles existent, l'une et l'autre, dans 12 carrés α. Mais elles se trouvent aussi das des carrés β VIII, $\delta\,\varepsilon\,\underline{\text{II}}$ et $\delta\,\varepsilon\,\underline{\text{I}}$. Si l'on conservait pour les carrés α où on les rencontre, l'o-

rientation donnée par Frénicle, ces combinaisons n'existeraient dans ces carrés qu'à la condition d'être retournées de 90 degrés autour du centre. Il a semblé préférable de faire subir ce mouvement de rotation aux carrés eux mêmes.

Les figures C et D existent encore dans douze carrés α. Mais on les trouve aussi dans des carrés β IV, et pour qu'un retournement ne soit pas nécessaire, il suffit de conserver l'orientation de Frénicle; c'est ce que nous avons fait. Nous croyons inutile de donner d'autres exemples; il faut seulement savoir que cette manière de régler les choses n'a rien d'absolu. Il y a des combinaisons qui se trouvent dans deux classes de carrés où il existe des lignes orthogonales *mc*, et qui s'y trouvent avec une orientation différente. Ainsi la combinaison F existe dans les classes β VIII et β IV, et pour la retrouver dans la classe β IV il faut la retourner de 90 degrés. Cela a lieu pour les combinaisons Θ, M, N, P, U, V : elles changent d'orientation en passant d'une classe à l'autre. Dans les tables que nous avons construites à cet effet et que nous publierons plus tard, nous avons indiqué ces changements d'orientation en soulignant la lettre dont il s'agit.

Maintenant, à défaut de la table totale de Frénicle qu'il nous est impossible de publier à l'époque où nous sommes, nous donnons ici, comme exemple de notre travail, les 20 carrés qui occupent la seconde page du mémoire, dans le volume de l'Académie des Sciences.

Frénicle n'a mis à ses carrés aucun titre, si ce n'est la lettre grecque α, β, γ ou δ qui donne l'indication de la classe. Dans les titres que nous avons composés, on voit d'abord un numéro d'ordre, qui sert à nommer le carré et à lui donner une personalité; il y a ensuite une lettre grecque avec un chiffre romain; on connaît ainsi la classe et le groupe. Chaque groupe a un nom : c'est le numéro d'ordre du carré qui lui appartient, et qui se présente le premier dans la table. Ce numéro est surmonté de la lettre grecque Λ; si le carré considéré est un de ceux qui donnent leurs noms aux groupes, il n'y a pas de numéro surmonté de la lettre Λ. Le sens des petits carrés qui accompagnent plusieurs titres sera expliqué dans la suite.

Quand le carré possède des combinaisons de symétrie variable, elles sont indiquées à droite de la seconde et de la troisième ligne.

La lettre α n'est jamais suivie d'aucun chiffre romain; on sait en effet que la classe α ne renferme que des carrés VIII.

17 β VIII □	18 γ′ II	19 α	20 γ′ IV □
1 11 8 14	1 15 14 4	1 12 13 8	1 12 14 7
16 6 9 3	12 6 7 9 R	15 6 3 10	15 6 4 9 G
10 4 15 5	8 10 11 5 S	4 9 16 5	8 13 11 2 H
7 13 2 12	13 3 2 16	14 7 2 11	10 3 5 16

21 α □	22 β VIII $\underset{2}{\wedge}$	23 β VIII	24 β VIII □
1 12 7 14	1 10 8 15	1 10 15 8	1 10 15 8
15 6 9 4	16 7 9 2 Θ	16 7 2 9 G	16 7 2 9
10 3 16 5	13 6 12 3 F	4 11 14 5 H	6 13 12 3
8 13 2 11	4 11 5 14	13 6 3 12	11 4 5 14

25 β VIII $\underset{4}{\wedge}$ □	26 δ VI	27 δ VI	28 γ′ IV
1 10 8 15	1 12 13 8	1 13 12 8	1 14 15 4
16 7 9 2	16 7 2 9	16 7 2 9	12 7 6 9 G
11 4 14 5	3 10 15 6	3 10 15 6	8 11 10 5 H
6 13 3 12	14 5 4 11	14 4 5 11	13 2 3 16

29 α $\underset{7}{\wedge}$	30 γ′ IV □	31 α $\underset{6}{\wedge}$ □	32 δ ε IV
1 14 4 15	1 12 15 6	1 14 11 8	1 14 15 4
12 7 9 6 A	14 7 4 9	12 7 2 13 A	10 8 5 11 D d
13 2 16 3 B	8 13 10 3	6 9 16 3 B	7 9 12 6 Θ θ
8 11 5 10	11 2 5 16	14 4 5 10	16 3 2 13

33 β IV	34 β IV	35 γ VIII	36 δ ε IV
1 15 14 4	1 14 15 4	1 14 4 15	1 15 14 4
10 8 5 11 Θ	11 8 5 10 Θ	11 8 10 5	11 8 5 10 F f
7 9 12 6 F	6 9 12 7 F	16 3 13 2	6 9 12 7 G g
16 2 3 13	16 3 2 13	6 9 7 12	16 2 3 13

Le carré 28 est célèbre; il était connu des Hindous. C'est un de ceux que les astrologues du seizième siècle ont annexés aux sept planètes. Il était chargé de diriger la planète Jupiter dans ses mouvements sur son orbite, et il s'en est acquitté fort mal, puisque finalement Laplace a été obligé de courir après cette planète, de corriger ses inégalités, et de la ramener à une exacte observation des lois de Képler.

Il y a aussi dans l'histoire de ce carré un événement qui a été fâcheux pour lui. Albert Durer l'a introduit dans sa gravure de la Mélancolie, et, en bon Allemand qu'il était, il l'a saisi d'une main si brutale qu'il l'a estropié: il lui a cassé l'un de ses termes. Nous donnons ici un fac simile de la gravure: on voit que le troisième nombre de la première colonne verticale de gauche, qui est 9, se trouve fracturé, mis hors d'usage, et remplacé par un 2. Il en résulte que le chiffre 2 est répété deux fois, ce qui est une des plus tristes difformités qu'on puisse observer dans un carré magique.

Ce qu'il y a de plus curieux dans cette faute, c'est que personne ne s'en est aperçu. Que les critiques d'art n'y aient pas fait attention, cela se comprend. Que Michiel, Bartsch, Théophile Gautier et d'autres auteurs du même genre n'aient même pas soupçonné ce que c'était que cette combinaison de nombres, nous n'y voyons pas de difficulté. Mais ce qui est étonnant, c'est qu'une erreur aussi grossière ait échappé à des auteurs tels que Barbette ou Riollot, qui ont parlé de l'oeuvre d'Albert Durer dans des traités ex professo sur les carrés magiques.

Barbette, par exemple, a vu certainement la gravure; car il l'appelle Melencolia, reproduisant ainsi la faute d'orthographe qui s'y trouve, et qu'il n'aurait pas imaginée s'il ne l'avait pas eue sous les yeux.

Cette faute d'orthographe donne lieu à une observation bizarre; c'est qu'elle n'a pu être faite que par un Français. Il n'y a que la langue française qui attribue le même son aux syllabes *en* et *an*, et l'on sait que chez nous il n'est pas rare de rencontrer des cuisinières qui inscrivent sur leur carnet de dépense qu'elle ont acheté des noix et des *amendes*.

Bartsch a prouvé qu'Albert Durer n'attaquait pas le bois lui même; il dessinait sur des tablettes les sujets de ses compositions, et il les donnait à des imagiers qui se chargeaient de faire la gravure. Un de ces imagiers a dû être français. Ceux qui ont de la vénération pour la mémoire d'Albert Durer, et de l'estime pour ses travaux de mathématiques accuseront peut-être l'imagier d'avoir ajouté une faute d'arithmétique à la faute d'ortographe, et d'être le véritable auteur de la lésion que j'ai diagnostiquée dans le carré magique. C'est leur affaire et non pas la mienne; cela ne me regarde pas.

Le carré 18 est, comme le carré 28, un des plus anciennement connus. Nous allons nous en servir pour étudier la structure, jusqu'ici ignorée, d'un autre carré non moins célèbre, que nous appellerons le



Sans ordre autour de lui mille objets sont épars;
Ce sont des attributs de sciences et d'arts,
La règle et le marteau, la sphère emblématique,
Le sablier, la cloche et la table mystique.

. . . .

. . . .

Une chauve-souris qui d'un donjon s'envole
Porte écrit sur son aile ouverte en banderolle
MÉLANCOLIE.

Théophile Gautier.

carré de Mercure. Car c'est un de ces bergers arithmétiques à qui les astrologues avaient confié la surveillance du troupeau céleste, dans ces prairies où il ne cesse de se promener pour brouter le vide, et pour donner aux hommes une occasion de faire des calculs. Il était chargé spécialement de la planète Mercure ; il se présente ainsi :

Fig.7.

8	58	59	5	4	62	63	1
49	15	14	52	53	11	10	56
41	23	22	44	45	19	18	48
32	34	35	29	28	38	39	25
40	26	27	37	36	30	31	33
17	47	46	20	21	43	42	24
9	55	54	12	13	51	50	16
64	2	3	61	60	6	7	57

Si l'on détache les seize nombres qui occupent le centre, on a la figure suivante :

22	44	45	19
35	29	28	38
27	37	36	30
46	20	21	43

C'est un carré magique de 4 dont le nombre magique est 130. Il est formé à l'aide des quatre progressions arithmétiques que voici :

19, 20, 21, 22 27, 28, 29, 30 35, 36, 37, 38 43, 44, 45, 46.

Si l'on écrit sous chacun des termes précédents l'un des seize premiers nombres disposés dans leur ordre naturel, on a un barême avec lequel on peut transformer le carré proposé en un carré formé avec les seize premiers nombres, et inversement.

On obtient ainsi le carré 18 retourné de droite à gauche :

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

A l'aide du même barême, on pourrait disposer les nombres de nos quatre progressions de manière à imiter la structure de n'importe

lequel des carrés de la table de Frénicle, et chacun de ces résultats pourrait être substitué au noyau central du carré de Mercure, si c'était un carré magique. D'ailleurs, ces carrés peuvent être orientés chacun de 8 manières différentes. Le carré de Mercure admettrait donc par ce procédé 7040 changements.

Maintenant nous pouvons réunir, dans trois figures différentes :

1° les huit termes situés au dessus du noyau, et les huit qui sont au dessous

59	5	4	62
14	52	53	11
54	12	12	51
3	61	60	6

2° les huit termes qui sont à droite du noyau, et les huit qui sont à gauche

41	23	18	48
32	34	39	25
40	26	31	39
17	47	42	24

3° les 16 termes qui restent et qui se trouvent isolés en groupes de quatre termes dans les quatre coins

8	58	63	1
49	15	10	56
9	55	50	16
64	2	7	57

Ces figures sont des carrés magiques de 4 ayant 130 pour nombre magique; elle dérivent du carré 18 de Frénicle de la même manière que le carré qui forme le noyau, et, si l'on pouvait, à l'aide de leurs barêmes, former avec les termes qui les composent des carrés correspondant aux 880 carrés de notre table, on voit que cela ferait pour notre carré de Mercure, un nombre de chargements égal 7040^4. A la vérité, on aurait ainsi chacune des transformations possibles dans ses huit orientations différentes, de sorte que pour avoir un résultat exact, il faudrait diviser le nombre obtenu par 8.

Cependant il se présente une difficulté. C'est qu'à la vérité la plupart des carrés magiques de 4 forment à l'aide de nos barêmes et à l'aide des quatre séries de termes proposées, des carrrés magiques de quatre ayant 130 pour nombre magique. Mais cela n'a pas lieu pour tous.

Cela étant, je dois ici me borner à dire que j'ai calculé le nombre réel de changements, à l'aide d'un méthode qu'il serait trop long de développer dans l'espace si restreint dont je peux disposer maintenant;

je me réserve de la faire connaître plus tard. Le nombre cherché est égal à

$$8^3 \times 656^2 \times 596 \times 528 = 69\ 335\ 846\ 486\ 016 = M.$$

Voyons maintenant combien on peut faire de combinaisons de symétrie avec le carré de Mercure. En le prenant tel qu'il est, on voit qu'il se compose de quatre carrés qui ont le même centre, et qui posséderaient chacun 60 combinaisons si les termes employés étaient les 16 premiers nombres. Mais, avec les termes qui s'y trouvent, on n'a que 52 combinaisons seulement. En assemblant de toutes les manières les combinaisons de deux de ces carrés entr'elles, on aura des combinaisons de 8 termes qui s'appliqueront au carré total: cela en fait 2704. Comme les quatre carrés peuvent être combinés deux à deux de 6 manières différentes. on voit que le nombre total est 16224.

D'ailleurs il est certain que si l'on prend tous les changements dont l'ensemble est exprimé par le nombre M, on n'aurait pas constamment 16224 combinaisons pour chacun d'eux. Mais on les aurait pour beaucoup d'entr'eux, pour un très grand nomble même; cela résulte de la méthode que nous avons employée pour déterminer ce nombre M, méthode que nous ne développerons pas ici.

Comparons à présent ces résultats avec ceux que donnent les carrés diaboliques de Lucas et des auteurs qui ont suivi ses idées.

En imprimant quelques modifications au carré de Mercure, on en fait le carré diabolique suivant:

Fig. 8.

1	69	62	4	8	58	59	5
56	10	11	53	49	15	14	52
48	18	19	45	41	23	22	44
25	39	38	28	32	34	35	29
57	7	6	60	64	12	3	61
16	50	51	13	9	55	54	12
24	42	43	21	17	47	46	20
53	31	30	36	40	26	27	37

C'est une figure banale, dans laquelle on chercherait en vain ces propriétés que nous avons trouvées dans le carré de Mercure, ou dans d'autres carrés qui, avec le système de Lucas, mériteraient à peine un examen attentif.

Au reste, nous sommes loin de prétendre qu'il n'y ait rien à étudier dans le diabolisme ; bien au contraire, nous allons le présenter sous une forme nouvelle, avec une définition nouvelle, et avec des preuves inattendues de l'intime union qui existe entre l'arithmétique supérieure et l'étude des êtres vivants.

Nous nous baserons sur les résultats qu'on obtient en faisant manœuvrer les pièces du jeu d'échecs sur les cases d'un carré magique.

Supposons qu'en partant d'une case quelconque une pièce du jeu d'échecs marche toujours dans la même direction, et toujours de la même manière. Après un certain nombre de coups, elle se trouvera à la limite de l'échiquier, et elle ne pourra plus avancer. Nous supposerons qu'il y a un deuxième échiquier, juxtaposé au premier, sur lequel le mouvement se continue, et nous reporterons cet échiquier supplémentaire sur l'échiquier primitif. Par ce mécanisme, l'échiquier devient une surface sans fin, au lieu d'être una surface limitée, et l n'y aura plus rien qui puisse arrêter notre évolution. Nous arriverons ainsi à retourner au point de départ, et nous dirons que la pièce proposée a fait une *marche magique.*

Voyons ce que sera la marche magique du roi. Sur la figure 8, prenons pour point de départ la case où se trouve le nombre 12. Si le roi suit une ligne orthogonale, la ligne verticale par exemple, il peut la parcourir de haut en bas, ou de bas en haut. Prenons le premier procédé : le roi parcourt les cases magiques en passant par les nombres 55, 47, 26 ; arrivé là, il passe sur l'échiquier supplémentaire ; nous reportons sa position sur la case 58 ; il continue son mouvement, et, après 8 coups, il retourne à la case 12 ; sa marche magique est terminée. Il en sera toujours de même, s'il suit une direction orthogonale.

Prenons maintenant une ligne oblique. En allant de gauche à droite, et de haut en bas, nous trouvons les cases 12, 54, 20. De là, au moyen d'un premier échiquier supplémentaire, nous allons à la case 53, et nous revenons au moyen d'un second échiquier supplémentaire à la case 12, après avoir parcouru les cases 69, 11, 45, 32, en sorte que la marche magique s'effectue en huit coups, de même que sur les lignes orthogonales. Elle comprend, avec la case 53, toute la ligne oblique, de la case 69 à la case 20 ; de même avec les cases 16, 42 et 30, elle comprendrait les cases 4, 49, 23, 35 et 61. En résumé, ces marches magiques s'exécutent sur les lignes orthogonales ou dia-

gonales, et sur des lignes obliques composées de deux tronçons qui parcourent toutes les lignes orthogonales, mais sans qu'il y ait jamais sur l'un et l'autre deux cases appartenant à la même ligne orthogonale.

Toutes ces marches magiques recouvrent des termes dont la somme forme, dans les carrés diaboliques de Lucas, le nombre magique. Aussi nous croyons devoir abandonner le mot *diabolique*, mot bizarre, et *qui n'indique aucune propriété de la figure*, et nous dirons que ces carrés magiques sont les carrés magiques du roi, en anglais *King's Magic Squares*, ou abréviativement KMS. Si on veut savoir pourquoi nous préférons la langue anglaise, c'est parce que c'est la seule où les noms du roi (*King*), et de la reine (*Queen*), ont des initiales différentes. Il faut éviter en effet avec soin l'équivoque entre le roi et la reine. La marche de la reine est très différente de celle du roi, dans certains cas; dans d'autres elle est identique. Dans les échiquiers de 64 cases par exemple, la marche magique de la reine couvre les mêmes cases que celle du roi, si la reine ne fait jamais que passer d'une case à la case suivante, ou si elle franchit à chaque pas un nombre impair de cases. Mais si elle franchit un nombre pair de cases, elle n'atteindra jamais que la moitié des cases qui sont comprises dans la marche magique du roi.

On voit que dans les carrés KMS les lignes orthogonales extrêmes peuvent être placées de l'autre côté de la figure, sans qu'on cesse d'avoir un carré magique. En effet, supposons que dans la figure 8 on enlève la ligne horizontale 1, 69 . . . 59, 5, pour la mettre au dessous de la dernière ligne d'en bas. Dans ce mouvement les lignes orthogonales ont conservé leur valeur, et, quant à la diagonale gauche du nouveau carré, il se trouve que c'est à présent la ligne 56, 18 ... 47, 27, à laquelle on a ajouté le terme 5; d'aprés ce que nous avons dit, cette diagonale forme le nombre magique; il en est de même de la diagonale opposée. D'ailleurs le nouveau carré magique est KMS comme le premier; on peut donc continuer la même opération indéfiniment.

Ainsi nous pouvons écrire quatre fois la figure 8, en la répétant à droite et en bas de la figure actuelle; nous aurons un carré de 256 termes, dans lequel on trouvera 64 carrés magiques différents. Tout carré de 64 termes qu'on découpera dans l'intérieur de cette figure sera un carré magique de 8.

On peut concevoir cet ensemble de termes en considérant la figure 8 en elle même, et sans qu'il soit nécessaire de la répéter.

Imaginons que cette figure soit enroulée sur un cylindre, dont la hauteur serait égale à la circonférence de la base ; supposons que cette circonférence et cette hauteur égalent le côté de la figure ; cela fait, admettons que la surface du cylindre soit élastique, en sorte qu'on puisse le rouler sur lui même et souder ensemble les deux bouts, comme cela se fait pour un caoutchouc de bicyclette. Nous aurons ainsi un tore, que nous appellerons *tore magique.* Ce sera un objet semblable au tore sur lequel s'appuie la roue de la bicyclette, avec cette différence que dans la bicyclette le cercle directeur du tore est très grand, et le cercle générateur très petit, au lieu qu'ici les deux cercles en question se trouvent égaux. La figure 8 sera dessinée sur ce tore et formera une figure sans fin; elle jouira des propriétés que nous lui avons reconnues quand on l'a répétée quatre fois, et, quoiqu'elle n'ait que 64 termes, on pourra détacher sur elle 64 carrès magiques différents.

Le tore n'est pas une surface développable ; mais on peut admettre dans cet exemple que la figure 8 répétée quatre fois est le développement de la figure dessinée sur le tore, en ce sens qu'elle en possède toutes les propriètés.

Le quadrillage que nous étudions présente, dans sa forme gèométrique, des caractères semblables à ceux de beaucoup de quadrillages divers qu'on observe dans les plantes ou dans les animaux, et qui ont une origine commune; un grand nombre d'objets arrondis et régulièrement disposès, qui augmentent de volume par l'effet de leur développement, se compriment les uns les autres, deviennent polyédriques et dessinent des quadrilatères, des hexagones ou d'autres polygones encore, dont l'ensemble constitue un réseau parfois très étendu. La famille des synanthérées offre de beaux exemples de ces organisations: on peut citer, particulièrement, à cet égard, les dessins si remarquables qui existent dans l'organe floral du tournesol, quand les graines sont parvenues à leur maturité.

Appliquons ces principes aux carrés de 4 de la classe α, qui sont tous des carrés KMS ; nous allons voir qu'il en résultera, pour ces carrés, une classification qui sera en parfait accord avec celle que nous avons établie en formant nos groupes VIII. Ces groupes sont au nombre de 6; ils ont pour têtes de groupes les carrés 6, 7, 19, 21, 74, 76.

Par conséquent nous allons former le tore magique, successivement, avec les carrés 6, 7, 19; ce sont les premiers qui se présentent dans la table.

On aura les figures suivantes :

(6)

1	15	6	12	1	15	6	12
14	4	9	7	14	4	9	7
11	5	16	2	11	5	16	2
8	10	3	13	8	10	3	13
1	15	6	12	1	15	6	12
14	4	9	7	14	4	9	7
11	5	16	2	11	5	16	2
8	10	3	13	8	10	3	13

(7)

1	15	10	8	1	15	10	8
14	4	5	11	14	4	5	11
7	9	16	2	7	9	16	2
12	6	3	13	12	6	2	13
1	15	10	8	1	15	10	8
14	4	5	11	14	4	5	11
7	9	16	2	7	9	16	2
12	6	3	13	12	6	3	13

(19)

1	12	13	8	1	12	13	8
15	6	3	10	15	6	3	10
4	9	16	5	4	9	16	5
14	7	2	11	14	7	2	11
1	12	13	8	1	12	13	8
15	6	3	10	5	6	3	10
4	9	16	5	4	9	16	5
14	7	2	11	14	7	2	11

Voici maintenant la distribution des carrés dans les groupes VIII ; nous avons mis entre parenthèses les noms de ceux qui ont des combinaisons de symétrie variable, et les titres de ces combinaisons sont en tête des groupes qui les possèdent.

A B	A B			C D	C D
(6)	(7)	19	21	74	76
(261)	(259)	318	316	(211)	(211)
(140)	(142)	618	617	(602)	(604)
271	273	461	462	(771)	(772)
(381)	(379)	451	453	501	503
(31)	(29)	96	94	(412)	(410)
(367)	(369)	225	223	(423)	(422)
673	674	659	660	(839)	(840)

On trouve dans le tableau suivant la manière dont les groupes et les carrés sont distribués dans les tores magiques. Les noms des groupes ont été ajoutés en exposants à ceux des carrés ; on remarquera l'extrême régularité de leur agencement. C'est une preuve de plus qui montre combien notre distribution des carrés dans leurs groupes est conforme à la nature des choses.

(6)

6^{6}	31^{6}	410^{76}	422^{76}
76^{76}	140^{6}	673^{6}	840^{76}
212^{76}	604^{76}	581^{6}	261^{6}
271^{6}	772^{76}	503^{76}	367^{6}

(7)

7^{7}	96^{19}	412^{74}	461^{19}
21^{21}	142^{7}	617^{21}	771^{74}
211^{74}	659^{19}	579^{7}	318^{19}
223^{21}	839^{74}	453^{21}	369^{7}

(19)

19^{19}	74^{74}	225^{19}	273^{7}
29^{7}	94^{21}	423^{74}	462^{21}
618^{19}	674^{7}	451^{19}	501^{74}
602^{74}	660^{21}	259^{7}	316^{21}

Il est à remarquer que le lecteur, à l'aide de ces tableaux, se trouve en possession des éléments nécessaires pour vérifier, sur tous les carrés α qui ont des combinaisons de symétrie variable, l'existence de ces combinaisons.

Nous croyons en avoir dit assez pour faire sentir combien il est nécessaire d'expulser hors de la science des nombres l'idée du diabolisme qui n'aurait jamais dû y pénetrer. On ne verra pas dans notre critique l'expression d'un sentiment injuste à l'égard de Lucas ; nul n'admire plus que nous les travaux qu'il a accomplis ; mais dans notre épigraphe nous avons dit de lui ce que le Dante disait de Saint Thomas d'Aquin ; il est difficile d'aller plus loin.

La marche magique du roi n'est pas la seule qu'on puisse considérer utilement dans la géométrie de position en général. Celle du cavalier donne des résultats beaucoup plus importants.

Considérons un échiquier d'un nombre impair de cases et supposons

que ce nombre impair ne soit pas divisible par 3. Ce sera par exemple le nombre 49.

Marquons le numéro 1 sur une case quelconque; prenons la pour point de départ d'une marche magique du cavalier (fig. 9), et plaçons cette pièce successivement dans les cases où l'on voit les nombres 8, 15, 22, 29.... Après 7 coups elle revient au point de départ, et elle a laissé, dans les cases qu'elle a parcourues, les noms de tous les multiples de 7 augmentés de un.

Fig. 9.

13	37	19	43	25	7	31
22	4	35	10	41	16	47
38	20	44	26	1	32	14
5	29	11	42	17	48	23
21	45	27	2	33	8	39
30	12	36	18	49	24	6
46	28	3	34	9	40	15

Cela fait, reprenons comme point de départ la case 1, et dirigeons le cavalier dans une marche magique inverse de la première. Sur les cases où il va passer, il laissera les nombres 2, 3 . . . 7. Il repartira de même de la case 8 pour marquer les nombres 9, 10 . . . 14. Quand tous les nombres ont été marqués, on a un carré magique; c'est un carré KMS; si nous construisons le tore magique, nous aurons 49 carrés magiques diffèrents.

Mais il y a un grand nombre de manières de faire la figure. Au lieu de prendre les nombres 1, 8, 15... dans leur ordre naturel, on peut les prendre dans un ordre quelconque; on peut en faire autant pour les nombres 2, 3 . . . 7, et pour les autres suites de 6 nombres, pourvu que l'arrangement soit le même dans toutes les suites. Ainsi le nombre total de figures différentes serait $49 \times (7\,!)\,(6\,!)$. Mais on aurait ainsi une septuple reproduction de chacun des carrés obtenus, de sorte que ce résultat doit être divisé par 7; il se réduit à $(7\,!)^2 = 25\,401\,600$.

Ces figures appartiennent à une classe de carrés que j'appelle tessariques, et qui permettent de résoudre toute une série de problèmes. Pour s'en rendre compte, il est nécessaire de savoir que les nombres

de zéro à n^2 peuvent être écrits à l'aide de symboles qui constituent un système de numération, et dont la nature résulte d'une remarque très simple de La Hire. C'est qu'un nombre plus petit que $n^2 + 1$ peut être exprimé en écrivant successivement un chiffre arabe qui représente son quotient par n et un chiffre romain qui représente le reste de la division. Au cas où le nombre est un multiple de n, on suppose que le reste est égal à n. Ici, par exemple, n étant égal à 7, nous écrirons :

$$4 = (0, \mathrm{IV})$$
$$23 = (3, \mathrm{II})$$
$$35 = (4, \mathrm{VII})$$

Cela étant, on voit que si les nombres de notre figure 9 sont écrits à l'aide des symboles de La Hire, il y aura dans chaque ligne orthogonale ou diagonale du carré tous les chiffres romains et tous les chiffres arabes: aucun d'eux, par conséquent, ne sera répété.

Maintenant considérons n^2 objets et admettons qu'ils soient distingués les uns des autres par deux séries de n signes différents. Si on veut les ranger en carré de façon que dans chacune des lignes du carré on trouve toutes les caractéristiques des deux ordres, un carré tessarique de n sera un barême avec lequel on pourra résoudre la question.

Telle serait par exemple la question que voici: Pour établir le parquet d'un salon de réception de forme carrée dans un observatoire d'astronomie, on veut avoir 49 dalles, dont chacune représentera en mosaïque l'emblême de l'une des sept grandes planètes (Neptune, Uranus, Saturne, Jupiter, Mars, Vénus, Mercure) sur un fond qui sera l'une des sept couleurs de l'arc en ciel, et de façon que sur chacune des lignes du carré on voie toutes les planètes et toutes les couleurs. On remplacera, dans notre figure 9, chaque nombre par son symbole ; on assignera un chiffre arabe à chaque couleur, un chiffre romain à chaque planète, et le problème sera résolu.

Tel est encore le problème d'Euler : On a 36 officiers ; ils forment six groupes de six officiers chacun, ayant tous des grades différents dans la même série, mais pareils d'une série à l'autre ; les six groupes appartiennent à six régiments différents. On demande de ranger ces 36 officiers en carré de manière que dans chaque ligne du carré on trouve tous les régiments et tous les grades.

Ce problème est impossible, pace qu'il n'y a pas de carrés tessariques de six.

Les carrés tessariques de quatre se construisent par un procédé tout différent de celui qui donne les carrés des nombres impairs. Ce procédé est connu; je ne le décrirai pas ici. Il y a 144 carrés tessariques de 4; chacun d'eux fournit une solution particulière du problème XI de Bachet, qui consiste à ranger en carré les cartes des 4 quatrièmes majeures d'un jeu de piquet, de façon que dans chaque ligne du carré on trouve toutes les couleurs et toutes les figures.

J'ai modifié l'énoncé de ce problème comme il suit:

On a deux séries de quatre carrés; elles sont telles que si l'on ajoute de toutes les manières possibles les carrés de la première série et ceux de la seconde, on obtient toujours des nombres premiers de la forme $4h+1$. On demande de former avec les nombres premiers un carré magique.

Ce problème ne peut être résolu qu'à la condition d'écrire un carré tessarique avec les nombres premiers proposés. Il y a donc 144 solutions.

Pour la première série de carrés nous avons pris les nombres 4, 64, 2704, 3364. Pour la seconde série nous avons les nombres 9, 25, 49, 1369.

Si on les ajoute comme il a été dit, on obtient les 16 nombres premiers pour lesquels nous donnons la solution suivante:

3373	89	53	4073
1373	2753	3389	73
2729	13	1433	3413
113	4733	2713	29

Le nombre magique est 7588. En mettant à la place de chacun des termes les deux carrés dont il est la somme, on vérifiera que dans chacune des lignes du carré on a tous les carrés de chaque série. Si l'on veut d'autres solutions, il suffit de prendre pour barême l'un des carrés tessariques que l'on trouve dans la table de 20 carrés que nous avons donnée précédemment. Il y en a sept: ils sont indiqués par le signe □ placé dans le titre.

Les assemblages magiques dans lesquels les quatre termes, exprimés en symboles de La Hire, présentent la condition proposée, sont au



Une des 144 solutions du problème XI de Bachet.

nombre de 24. Nous les appellerons *Assemblages tessariques*. Tel est, par exemple, celui ci :

1 6 12 15.

Écrit à l'aide du systême symbolique, il devient :

(0, I), (1, II), (2, IV), (3, III).

On voit que les chiffres arabes sont tous différents, et qu'il en est de même des chiffres romains. Ces assemblages sont toujours des assemblages magiques parfaits. Dans le problème de Bachet, on impose, comme unique et seule condition, qu'il y ait un carré magique dont les lignes orthogonales et diagonales soient couvertes par des assemblages tessariques. Mais il y a là une circonstance qui jusqu'ici a échappé à tous les auteurs. C'est que la condition dont il s'agit ne peut pas exister sans une autre plus générale : il faut que les 24 assemblages tessariques couvrent 24 combinaisons de symétrie qui soient constamment les mêmes. Celles que Bachet a indiquées sont au nombre de dix ; les quatorze qui restent sont les suivantes (fig. 1) :

Le carré ADPV.
Le carré FGLM.
Les rectangles BCRS, EKHN.
Le carré ABEF et les trois carrés analogues.
Le carré ACKM et les trois carrés analogues.
Les rectangles EBSN, CHKR.

Comment cette condition est elle passée inaperçue ? Comment Euler, qui s'est occupé si longuement du problème des 36 officiers, n'a-t-il pas réussi à la reconnaître? Que dire de Barbette, qui ne l'a pas soupçonuée, quoiqu'il ait étudié pendant plusieurs années le problème de Bachet, dans lequel il a trouvé la base de son systême, si élégant d'ailleurs, des carrés magiques symboliques ? (1)

A ce propos, nous n'avons qu'à répéter ce qui a été déjà dit: c'est le défaut d'analyse qui est la cause du mal. Il fallait, si j'ose m'exprimer ainsi, faire l'anatomie des carrés magiques, et considérer

---

(1) Barbette, *Les carrés magiques du m^{me} ordre*. Liège 1912.

Nous sommes coupés de toute communication avec Liège; mais le livre de Barbette se trouve à la librairie Gauthier-Villars à Paris.

séparément leurs différentes parties. Beaucoup de propositions comme celle ci, qui sont demeurées dans l'ombre pendant fort longtemps, seraient aussitôt devenues évidentes.

On reconnaît sans peine que, pour un nombre quelconque n, il y a $n!$ assemblages tessariques. C'est ainsi qu'il y en a 120 dans les carrés de 5, 720 dans les carrés de 6, 5040 dans les carrés de 7. Une question intéressante se pose ici naturellement: c'est de savoir si l'on observe dans les carrés des ordres supérieurs la propriété que nous avons reconnue dans les carrés tessariques de quatre.

Voici que j'ai pu établir à cet égard.

Pour les carrés tessariques de 5, la propriété subsiste : il y a cent vingt figures de symétrie constante. Au delà, elle disparaît. Ainsi, sur notre figure 9 on peut s'assurer qu'elle est absente.

D'ailleurs le problème de Bachet entraîne beaucoup d'autres conditions que nous ne pouvons pas indiquer ici, parce qu'elles se rattachent à notre théorie des carrés magiques imaginaires. Cette théorie est inédite ; c'est à peine si nous en avons effleuré quelques principes dans une communication à l'*Intermédiaire des mathématiciens,* qui, à l'heure où nous écrivons, n'a pas encore été publiée. Nous nous bornerons à affirmer que, dans l'histoire des carrés magiques, de même que dans les autres branches de l'arithmétique et de l'algèbre, l'usage du symbole $\sqrt{-1}$ rend des services inestimables. Combiné avec celui du systême de numération de La Hire, il permet de saisir des propriétés qu'on n'aurait pas réussi à deviner autrement.

En terminant, j'observe aussi qu'à la page 29 je n'ai pas montré de quelle manière les carrés tessariques se multiplient par le changement de l'orientation. C'est encore là une de ces questions délicates qu'on n'a pas comprises jusqu'ici, et que le défaut d'espace m'empêche de discuter.

Turin, Mars 1917.

